

Méthode Multipôle Rapide pour les Équations Intégrales de Frontière en élastodynamique tridimensionnelle

Stéphanie Chaillat ¹, Marc Bonnet ²
et Jean-François Semblat ³

¹LMS-École Polytechnique et LCPC

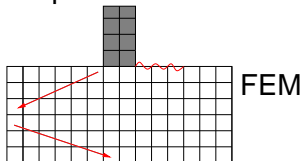
²LMS-École Polytechnique

³LCPC

Réunion QSHA-WP3, 23 novembre 2006

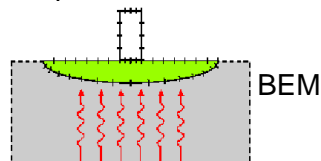
Avantages de la BEM

Méthode par éléments finis



- maillage volumique
- prise en compte approchée rayonnement à l'infini (conditions absorbantes)
- matrice **CREUSE**

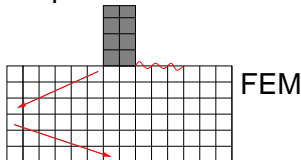
Méthode par éléments de frontière



- maillage surfacique (+interfaces)
- prise en compte exacte rayonnement à l'infini
- couches homogènes
- matrice **PLEINE**

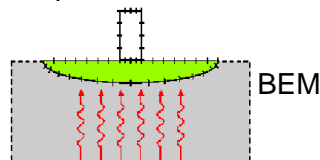
Avantages de la BEM

Méthode par éléments finis



- maillage volumique
- prise en compte approchée rayonnement à l'infini (conditions absorbantes)
- matrice **CREUSE**

Méthode par éléments de frontière



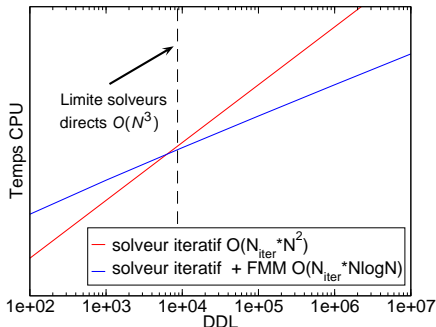
- maillage surfacique (+interfaces)
- prise en compte exacte rayonnement à l'infini
- couches homogènes
- matrice **PLEINE**

Méthode bien adaptée pour simuler la propagation des ondes sismiques dans les milieux étendus.

Limites

Solveurs classiques BEM limités

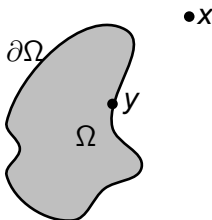
- problèmes réalistes (hétérogénéité, 3D, ...)
→ grand nombre ddl
- FMM : repousser limites



Formulation intégrale : élastodynamique stationnaire

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda(\operatorname{div} \mathbf{u})\mathbf{1} + \mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}); \quad \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \rho\omega^2 \mathbf{u} = 0$$

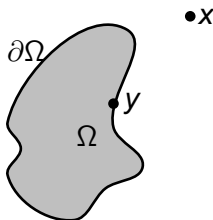
$$\kappa u_k(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} [t_i(\mathbf{y})U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega) - u_i(\mathbf{y})T_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega)] dS_y$$



Formulation intégrale : élastodynamique stationnaire

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda(\operatorname{div} \mathbf{u})\mathbf{1} + \mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}); \quad \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \rho\omega^2 \mathbf{u} = 0$$

$$\kappa U_k(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} [t_i(\mathbf{y})U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega) - u_i(\mathbf{y})T_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega)] dS_y$$



Construction du problème discret par méthode de collocation

Équation intégrale : élastodynamique stationnaire

Solutions fondamentales de l'espace infini

$$U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega) = \frac{1}{4\pi k_S^2 \mu} \left((\delta_{qs} \delta_{ik} - \delta_{qk} \delta_{is}) \frac{\partial}{\partial x_q} \frac{\partial}{\partial y_s} G_S(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_k} G_P(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \right)$$

$$T_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega) = C_{ijkl} \frac{\partial}{\partial y_l} U_h^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega) n_j(\mathbf{y})$$

où $G_\alpha(z) = \frac{\exp(ik_\alpha z)}{z}$ (solution fondamentale équation de Helmholtz)

Équation intégrale : élastodynamique stationnaire

Solutions fondamentales de l'espace infini

$$\begin{aligned}
 U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega) &= \frac{1}{4\pi k_S^2 \mu} \left((\delta_{qs} \delta_{ik} - \delta_{qk} \delta_{is}) \frac{\partial}{\partial x_q} \frac{\partial}{\partial y_s} G_S(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_k} G_P(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \right) \\
 T_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega) &= C_{ijkl} \frac{\partial}{\partial y_l} U_h^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega) n_j(\mathbf{y})
 \end{aligned}$$

où $G_\alpha(z) = \frac{\exp(ik_\alpha z)}{z}$ (solution fondamentale équation de Helmholtz)

Singularité en $x = y$ d'où équation intégrale pour $x \in \partial\Omega$

$$\mathbf{c}_{ik}(\mathbf{x}) u_i(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} [t_i(\mathbf{y}) U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega) - u_i(\mathbf{y}) T_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega)] dS_{\mathbf{y}}$$

Bref historique de la FMM

Équations Laplace : Rokhlin (1985)

Électrostatique : Greengard (1988)

Électromagnétisme : Chew (1994)

Élastodyn. fréq. : Fujiwara (2000)

Électromagnétisme : Sylvand (2002)

Élastostatique isotrope : Yoshida (2001)

Élastodyn. temps : Nishimura (2002)

BEM-FEM : Margonari, Bonnet (2004)

Propriétés effectives matériaux composites

Nishimura, Liu (2005)

Bref historique de la FMM

Équations Laplace : Rokhlin (1985)

Électrostatique : Greengard (1988)

Électromagnétisme : Chew (1994)

Élastodyn. fréq. : Fujiwara (2000)

Électromagnétisme : Sylvand (2002)

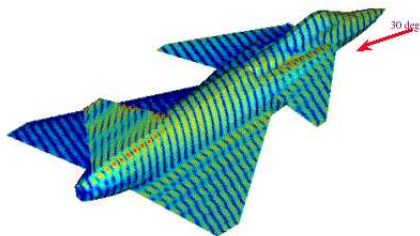
Élastostatique isotrope : Yoshida (2001)

Élastodyn. temps : Nishimura (2002)

BEM-FEM : Margonari, Bonnet (2004)

Propriétés effectives matériaux composites

Nishimura, Liu (2005)

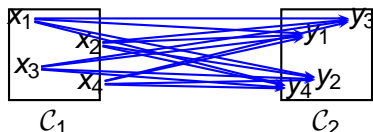


Exemple : Calcul de
champs électromagnétiques,
à hautes fréquences,
extérieurs
à un avion maillé
par éléments de frontière

W.C. Chew *Fast Solvers for Electromagnetic Simulations - A New Age Analysis Tool*, ACES 2000

Idée de la FMM

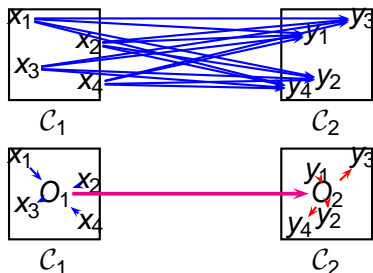
- Origine : électrostatique, effet de $O(N)$ charges électriques sur $O(N)$ points.
- Principe : regrouper points d'observations d'une part, sources d'autre part.



Méthode classique :
 $O(N^2)$ (16 calculs) : pour chaque point d'observation et chaque source

Idée de la FMM

- Origine : électrostatique, effet de $O(N)$ charges électriques sur $O(N)$ points.
- Principe : regrouper points d'observations d'une part, sources d'autre part.



Méthode classique :
 $O(N^2)$ (16 calculs) : pour chaque point d'observation et chaque source

FMM : $O(N)$ (9 calculs) : regroupement de points d'observation et de sources

Application aux solutions fondamentales de l'élastodynamique

$$c_{ik} u_k(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} [t_i(\mathbf{y}) U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega) - u_i(\mathbf{y}) T_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega)] dS_{\mathbf{y}}$$

$$U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega) = \frac{1}{4\pi k_S^2 \mu} ((\delta_{qs} \delta_{ik} - \delta_{qk} \delta_{is}) \frac{\partial}{\partial x_q} \frac{\partial}{\partial y_s} G_S(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_k} G_P(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|))$$

$$T_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega) = C_{ijkl} \frac{\partial}{\partial y_l} U_h^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega) n_j(\mathbf{y}), \quad G(z) = \frac{\exp(ikz)}{z}$$

Pour accélérer le calcul des intégrales, on cherche à séparer les variables \mathbf{x} et \mathbf{y} .

Développement multipôle

Th. de Gegenbauer (Epton et Dembart 1995).

$$G(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) = \frac{ik}{4\pi} \lim_{L \rightarrow +\infty} \int_{\|\vec{s}\|=1} e^{ik\vec{s} \cdot \mathbf{x}_{\vec{O}_1}} \mathcal{T}_{\vec{O}_1 \vec{O}_2}^L(\vec{s}) e^{ik\vec{s} \cdot \mathbf{y}_{\vec{O}_2}} d\vec{s}$$

Développement multipôle

Th. de Gegenbauer (Epton et Dembart 1995).

$$G(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) = \frac{ik}{4\pi} \lim_{L \rightarrow +\infty} \int_{\|\vec{s}\|=1} e^{ik\vec{s} \cdot \vec{O}_1} T_{O_1 \vec{O}_2}^L(\vec{s}) e^{ik\vec{s} \cdot \vec{O}_2 \mathbf{y}} d\vec{s}$$

T^L est appelé **développement multipôle** :

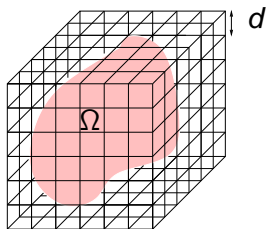
$$T_{O_1 \vec{O}_2}^L(\vec{s}) = \sum_{0 \leq \ell \leq L} (2\ell + 1) i^\ell h_\ell^{(1)}(k \cdot |O_1 \vec{O}_2|) P_\ell(\cos(\vec{s}, O_1 \vec{O}_2))$$

Paramètre troncature L pour convergence (Darve 1999):

- si L trop petit : mauvaise précision
- si L trop grand : divergence de la série

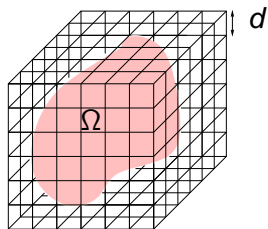
Méthode mono-niveau

Définition du domaine

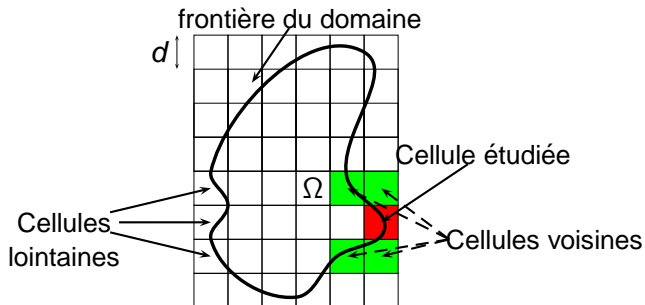


Méthode mono-niveau

Définition du domaine

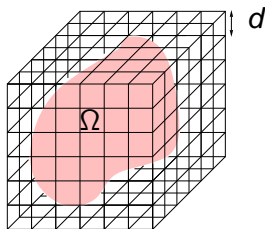


Définition des *cellules voisines* où la convergence de la série n'est pas assurée



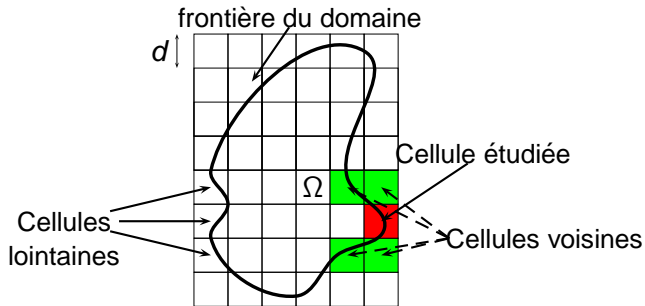
Méthode mono-niveau

Définition du domaine



$$K = K_{\text{FMM}} + K_{\text{proches}}$$

Définition des *cellules voisines* où la convergence de la série n'est pas assurée



Complexité optimale FMM mono-niveau : $O(N_{\text{itérations}} \times N^{3/2})$

Bilan

Avantages

- diminution d'une dimension du support de discrétisation
- réduction du temps de calcul d'un produit matrice-vecteur
- diminution de la place mémoire nécessaire (K_{FMM} non stockée)

Difficultés

- troncature du développement multipôle (paramètre troncature L)
- méthode de préconditionnement

Remarque

- résolution approchée (ajustement paramètres GMRES)



Bilan

Avantages

- diminution d'une dimension du support de discrétisation
- réduction du temps de calcul d'un produit matrice-vecteur
- diminution de la place mémoire nécessaire (K_{FMM} non stockée)

Difficultés

- troncature du développement multipôle (paramètre troncature L)
- méthode de préconditionnement

Remarque

- résolution approchée (ajustement paramètres GMRES)



Bilan

Avantages

- diminution d'une dimension du support de discrétisation
- réduction du temps de calcul d'un produit matrice-vecteur
- diminution de la place mémoire nécessaire (K_{FMM} non stockée)

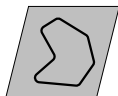
Difficultés

- troncature du développement multipôle (paramètre troncature L)
- méthode de préconditionnement

Remarque

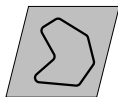
- résolution approchée (ajustement paramètres GMRES)

Méthode Multi-niveaux

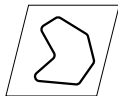


niveau 0

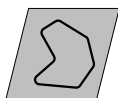
Méthode Multi-niveaux



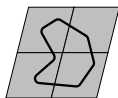
niveau 0



Méthode Multi-niveaux

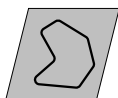


niveau 0

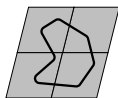


niveau 1

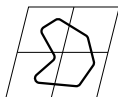
Méthode Multi-niveaux



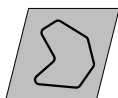
niveau 0



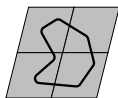
niveau 1



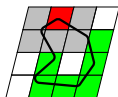
Méthode Multi-niveaux



niveau 0

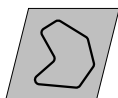


niveau 1

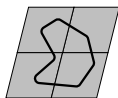


niveau 2

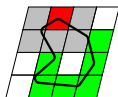
Méthode Multi-niveaux



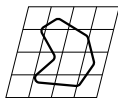
niveau 0



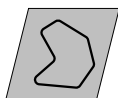
niveau 1



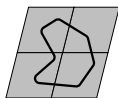
niveau 2



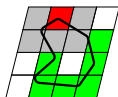
Méthode Multi-niveaux



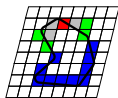
niveau 0



niveau 1

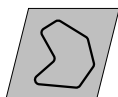


niveau 2

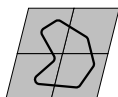


niveau 3

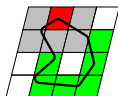
Méthode Multi-niveaux



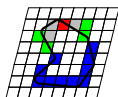
niveau 0



niveau 1



niveau 2



niveau 3

⋮

niveau n

→ plus haut niveau auquel développement FMM applicable.

Complexité optimale
FMM multi-niveaux :
 $O(N_{\text{itérations}} \times N \log(N))$

Avantages de la méthode pour la simulation de la propagation des ondes sismiques

- le nombre limite d'inconnues sur la frontière est repoussé à 1 million pour un calcul en quelques heures sur un PC (plus à venir)
- la mémoire n'est plus un facteur limitant
- la réduction de la précision induite par la FMM est négligeable

Validation : Diffraction d'une onde plane P incidente par un canyon semi-sphérique

Comparaison des solutions numériques calculées par la FMM avec les résultats de Sánchez-Sesma (Diffraction of elastic waves by 3D surface irregularities, BSSA, 1983) pour $\eta_P = 0.25$

