

Méthode des volumes finis pour l'élastodynamique

Simulation numérique de la propagation d'ondes et de la rupture dynamique des séismes en maillages non réguliers (2D et 3D) en milieu hétérogène

M. Ben Jemaa¹ V. Cruz-Atienza² N. Glinsky-Olivier¹ S. Lanteri¹
S. Piperno¹ J. Virieux³

¹CERMICS-INRIA, projet CAIMAN, Sophia Antipolis, France

²SAN DIEGO STATE UNIVERSITY, San Diego, CA,USA

³GÉOSCIENCES AZUR, Sophia Antipolis, France

Réunion QSHA - 23 novembre 2006

Les équations élastodynamiques

- Milieu 2D (ou 3D), isotrope, linéairement élastique
Système vitesse-contraintes d'ordre un

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \operatorname{div} \underline{\sigma} \\ \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial t} = \lambda \operatorname{div} \vec{v} \operatorname{Id}_2 + \mu \left[\vec{\nabla} \vec{v} + (\vec{\nabla} \vec{v})^t \right] \end{cases}$$

En 2D

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_z \end{pmatrix} \quad \underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

- Changement de variables (cas hétérogène)

$$\vec{v} \longrightarrow \vec{v} \quad \underline{\sigma} \longrightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_2 \end{pmatrix}$$
$$\sigma_1 = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} - \sigma_{zz}) ,$$

- Forme pseudo-conservative

$$\Lambda \frac{\partial W}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{F}}(W) = \frac{\partial \mathcal{F}_1(W)}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{F}_2(W)}{\partial z}$$

- W inconnue, Λ matrice diagonale, \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 flux

$$W = (v_x, v_z, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_{xz})^t \quad \Lambda = \text{diag} \left(\rho, \rho, \frac{1}{\lambda + \mu}, \frac{1}{\mu}, \frac{1}{\mu} \right) = \text{diag} \left(\rho, \rho, \tilde{\Lambda} \right)$$

$$\mathcal{F}_1 = \begin{pmatrix} \sigma_1 + \sigma_2 \\ \sigma_{xz} \\ v_x \\ v_x \\ v_z \end{pmatrix} \quad \mathcal{F}_2 = \begin{pmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_1 - \sigma_2 \\ v_z \\ -v_z \\ v_x \end{pmatrix}$$

- Propriétés du matériau dans Λ uniquement

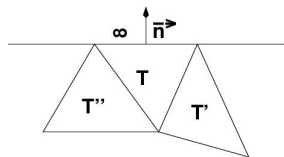
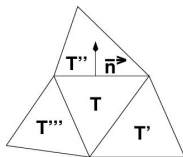
La formulation volumes finis

- Discrétisation par un maillage triangulaire/tétraédrique éléments finis
- Inconnue W ainsi que ρ , λ et μ constants sur chaque élément
- Un unique maillage pour toutes les quantités
- Intégration sur T

$$\int_T \Lambda \frac{\partial W}{\partial t} dx dz = \int_{\partial T} \vec{\mathcal{F}}(W) \cdot \vec{n} ds$$

\vec{n} normale sortante à T , $\partial T = \bigcup_{T' \text{ voisin de } T} T \cap T'$,
 $V(T)$ ensemble des voisins de T

$$\text{aire}(T) \Lambda_T (W_t)_T = \sum_{T' \in V(T)} \Phi_{T,T'} + \Phi_{T,\infty}$$



- Flux internes : schéma centré

$$\int_{\partial T \cap \partial T'} \vec{\mathcal{F}}(W) \cdot \vec{n} \, ds \cong \Phi_{T,T'} = \Phi(W_T, W_{T'}) = \vec{\mathcal{F}}\left(\frac{W_T + W_{T'}}{2}\right) \cdot \int_{\partial T \cap \partial T'} \vec{n} \, ds$$

- Intégration en temps : schéma saute-mouton

Sur $W = (v, \gamma)^t$ avec $v = (v_x, v_z)^t$ et $\gamma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{xz})^t$

Découplage des flux

$$\Phi(W_T, W_{T'}) = (\Phi_v(\gamma_T, \gamma_{T'}), \Phi_\gamma(v_T, v_{T'}))^t$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_T^{n+\frac{1}{2}} = v_T^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\text{aire}(T)} \frac{1}{\rho_T} \sum_{T' \in V(T)} \Phi_v(\gamma_T^n, \gamma_{T'}^n) + \Phi_v T, \infty \\ \gamma_T^{n+1} = \gamma_T^n + \frac{\Delta t}{\text{aire}(T)} \tilde{\Lambda}_T^{-1} \sum_{T' \in V(T)} \Phi_\gamma(v_T^{n+\frac{1}{2}}, v_{T'}^{n+\frac{1}{2}}) + \Phi_\gamma T, \infty \end{array} \right.$$

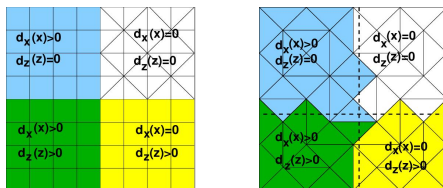
Les conditions aux limites

- Surface libre $\underline{\sigma} = 0$ de façon faible $\Phi_{T,\infty}(\Phi_v(0,0), \Phi_\gamma(v_T, v_T))$
- Conditions aux limites absorbantes

- Condition absorbante d'ordre un pour $\Phi_{T,\infty}$ (ondes sortantes uniquement)
- Perfectly Matched Layer (Béranger)
 - Décomposition de W dans les zones latérales $v_x = v_x^1 + v_x^2$
 - Introduction de paramètres d'amortissement $d_x(x)$ et $d_z(z)$
 - Décomposition partielle de l'équation pseudo-conservative

$$\rho \frac{\partial v_x^1}{\partial t} + d_x(x) v_x^1 = \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_1 + \sigma_2) \quad \text{et} \quad \rho \frac{\partial v_x^2}{\partial t} + d_z(z) v_x^2 = \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{xz})$$

- Schéma itératif
 - sur v_x^1 et $v_x^2 \longrightarrow (v_x^1)^{n+\frac{1}{2}}$ et $(v_x^2)^{n+\frac{1}{2}} \longrightarrow v_x^{n+\frac{1}{2}} = (v_x^1)^{n+\frac{1}{2}} + (v_x^2)^{n+\frac{1}{2}}$
- Application en maillage quadrangulaire additionnel ou avec le maillage initial



Les conditions de rupture

- Faille prédéfinie dans le maillage initial (ensemble de segments ou de faces)
- Condition sur la faille

$${}^t \vec{t} \underline{\sigma} \vec{n} = g$$

- Condition stable issue d'un bilan d'énergie

Energie totale

$$E = \underbrace{\int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \|\vec{v}\|^2}_{E_c} + \underbrace{\int_{\Omega} \frac{1}{2} {}^t \gamma \tilde{\Lambda} \gamma}_{E_m}$$

Energie discrète

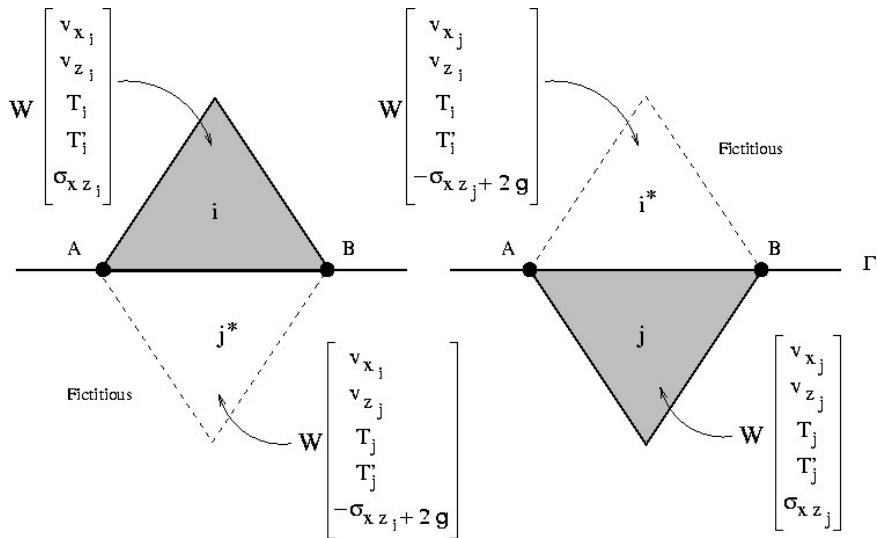
$$E^n = \frac{1}{2} \sum_T \text{aire}(T) \left(\rho_T {}^t v_T^{n-\frac{1}{2}} v_T^{n+\frac{1}{2}} + {}^t \sigma_T^n \tilde{\Lambda}_T \sigma_T^n \right)$$

Conservation de l'énergie totale

$$\Delta E = E^{n+1} - E^n = 0$$

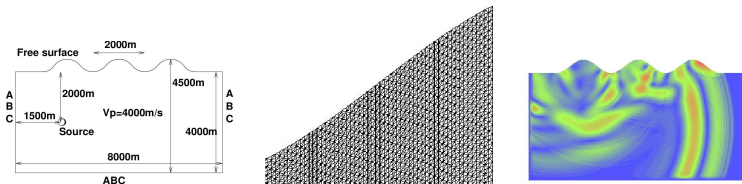
Condition de flux sur les éléments i et j bordant la faille

Prise en compte de la discontinuité de v_x de part et d'autre de la faille

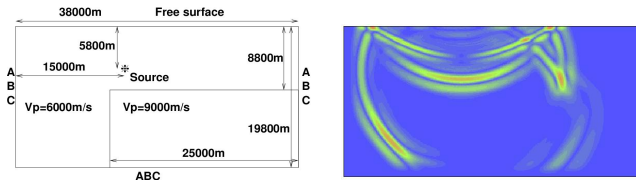


Validation en 2D : propagation de source explosive

- Cas test homogène, surface libre non rectiligne



- Cas test hétérogène : corner edge



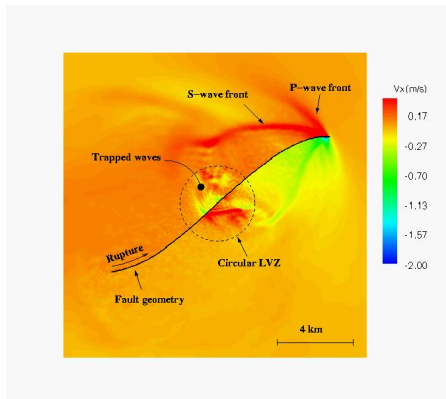
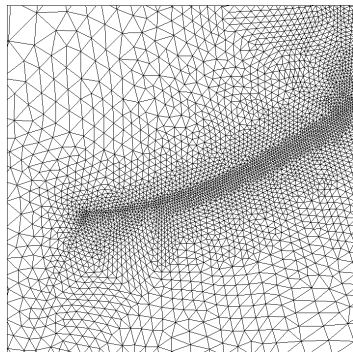
Validation en 2D : propagation d'une faille courbe en milieu hétérogène

Milieu : $V_p = 4000$ m/s, $V_s = 2300$ m/s et $\rho = 2500$ Kg/m³

Zone lente : $V_p = 2200$ m/s, $V_s = 1300$ m/s et $\rho = 1400$ Kg/m³

Rupture : 14.3 km, zone de nucléation : 1 km

Isovaleurs de v_x à $t = 4$ s



- Résolution des équations élastodynamiques 3D par une méthode volumes finis
Version parallèle (en cours)
 - Cas tests réalistes en propagation et rupture
 - Gain en temps de calcul
 - Collaboration avec San Diego State University (Victor Cruz-Atienza)
- Utilisation d'une méthode Galerkin discontinu (P1) pour les équations élastodynamiques 3D
Version parallèle (envisagée)
 - Gain en précision
Variable W linéaire par élément
Bien adaptée à des solutions discontinues
Matrices de masse locales